

پاسخ تشریحی آزمون سراسری سال ۱۳۹۵
درس ریاضی، رشته علوم تجربی
خارج از کشور

نگارش:

مهرداد معدنی پور



سایت کنکور

☎: 0935 – 6061745

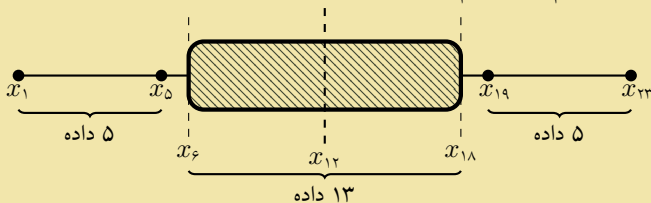
✉: mehrdad.mdpour@gmail.com

✈: telegram.me/mehrdadmadanipour

۱۳۰- در نمودار جعبه‌ای ۲۳ داده آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱/۶ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵ می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

- ۲۵/۸ (۱) ۲۶ (۲) ۲۶/۱ (۳) ۲۶/۲ (۴)

وقتی که ۲۳ داده داریم، داده‌ی ۱۲ام چارک دوم و داده‌ی ۱۶ام چارک اول و داده‌ی ۱۸ام چارک سوم خواهد بود. $x_6 = Q_1$, $x_{12} = Q_2$, $x_{18} = Q_3$



$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{23} = \frac{\text{داده آخر} + \text{داده اول} + \text{داده وسط}}{23} = \frac{5 + 13 + 25}{23} = \frac{43}{23} = 1.87$$

$$= \frac{5 \times 21.6 + 13 \times 25 + 5 \times 33}{23} = \frac{108 + 325 + 165}{23} = \frac{598}{23} = 26$$

گزینه ۲

۱۳۱- در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات کدام است؟

- ۰/۲۲۵ (۱) ۰/۲۷۵ (۲) ۰/۳۲۵ (۳) ۰/۳۷۵ (۴)

نکته: مجذور میانگین - میانگین مجذورها = واریانس

$$\bar{x} = \frac{240}{30} = 8, \sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{2190}{30} - 8^2 = 73 - 64 = 9$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

گزینه ۴

۱۳۲- دو تاس را با هم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

- $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{7}{18}$ (۳) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۱)

پیشامد مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

گزینه ۲

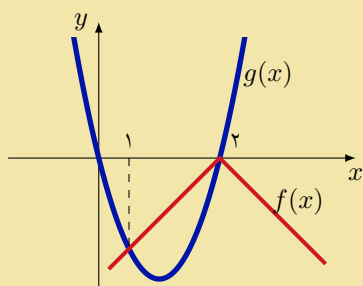
۱۳۳- مجموع جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2|$ به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (۱, ۲) (۴) (-۱, ۲) (۳) (-۱, ۱) (۲) (-۲, ۱) (۱)

$x^2 + 1$ مثبت است، پس می‌شود قدر مطلق آن را برداشت.

$$x^2 + 1 - |x - 2| > x^2 + 1 \Rightarrow \underbrace{-|x - 2|}_{f(x)} > \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)}$$

بازه‌ای که نمودار f بالای g باشد، جواب نامعادله است.



گزینه ۴

۱۲۶- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$. حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
۳	۴	۶	۱۰	۱۸	۳۴	۶۶	۱۳۰

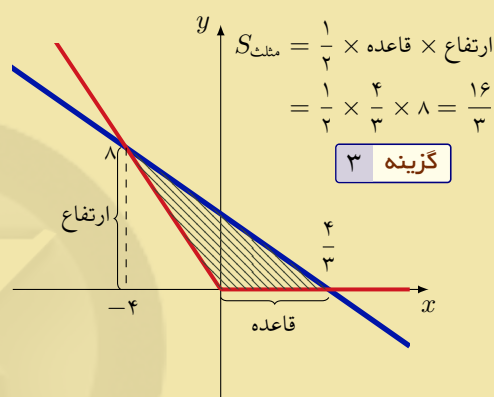
$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64$$

گزینه ۴

۱۲۷- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2 - \frac{3}{4}x$ و $y = |x| - x$ کدام است؟

- $\frac{16}{3}$ (۳) ۴ (۲) ۶ (۴) $\frac{8}{3}$ (۱)

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow |x| - x = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$$



گزینه ۳

۱۲۸- از معادله لگاریتمی $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ مقدار لگاریتم $\sqrt{x+1}$ در پایه ۴، کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴)

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\right) = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 2x - 5$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 2x-5 \Rightarrow x+2 = 2x-5 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow \log_4 \sqrt{x+1} = \log_4 \sqrt{8} = \log_4 2 = \log_{4^{\frac{1}{2}}} 2^1 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

۱۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، ماتریس $A + 2B$ وارون‌پذیر نیست؟

- ۷, ۵ (۱) -۵, ۷ (۲) -۷, ۴ (۳) -۳, ۵ (۴)

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix}$$

برای وارون‌ناپذیری باید $|A + 2B| = 0$

$$\begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{vmatrix} = (a-2)(a+4) - (3)(9) = a^2 - 2a - 8 - 27 = a^2 - 2a - 35 = 0$$

$$\Rightarrow (a+5)(a-7) = 0 \Rightarrow a = -5, 7$$

گزینه ۲

۱۳۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(h)}{h} \text{ کدام است؟}$$

(۴) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{7}{24}$ (۲) $\frac{5}{24}$ (۱) $\frac{7}{48}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(h)}{h} = f'(1)$$

مشق تابع هموگرافیک

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4x+5}{x+3}\right)' \times \left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4(3) - 5(1)}{(x+3)^2} \times \left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{(4)^2} \times \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{32} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{32} \times \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{7}{32} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{48}$$

گزینه ۱

۱۳۹- در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

(۴) $\frac{9}{14}$ (۳) $\frac{10}{21}$ (۲) $\frac{18}{42}$ (۱) $\frac{8}{21}$

باید یک مهره از ۴ مهره سفید و ۲ مهره بعدی را از ۵ مهره سیاه و قرمز

انتخاب کنیم: گزینه ۳

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 \times 10}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3!}} = \frac{4 \times 10 \times 6}{9 \times 8 \times 7} = \frac{10}{21}$$

۱۴۰- احتمال جوانه زدن هر دانه نوعی بذر، $\frac{1}{3}$ است. اگر ۴ دانه از این بذر در شرایط یکسان کاشته شوند، با کدام احتمال حداقل ۳ دانه جوانه می‌زند؟

(۴) $\frac{44}{81}$ (۳) $\frac{46}{81}$ (۲) $\frac{15}{27}$ (۱) $\frac{44}{81}$

این مسئله، یک توزیع دو جمله‌ای است که در ۴ بار آزمایش، انتظار

حداقل ۳ پیروزی دارد (یعنی ۳ یا ۴ بار). گزینه ۴

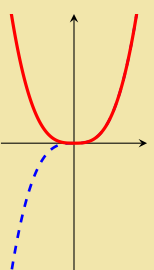
$$P(X=3) + P(X=4) =$$

$$\binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{4 \times 8}{3^4} + \frac{1 \times 16}{3^4} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

۱۴۱- تابع با ضابطه $f(x) = |x^3|$ با دامنه $\mathbb{R}$ ، چگونه است؟

(۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک به یک



با رسم نمودار تابع، به سادگی مشخص می‌شود که تابع، غیریک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است.

گزینه ۳

۱۳۴- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$ کدام است؟

(۴) 2 (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱) -2

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-\cot \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

گزینه ۱

۱۳۵- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

(۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۱) $2x^2 + 3x + 1$
(۴) $2x^2 + x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$

$$\begin{cases} g = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{g-1}{2} \\ f(g) = 8x^2 + 6x + 5 = 8\left(\frac{g-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{g-1}{2}\right) + 5 \end{cases}$$

$$f(g) = 2(g-1)^2 + 3(g-1) + 5 = 2g^2 - 4g + 2 + 3g - 3 + 5 = 2g^2 - g + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

گزینه ۳

۱۳۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

(۴) 2 (۳) 1 (۲) -1 (۱) -2

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{6x-2}}{a(2)+b} = \frac{0}{2a+b}$$

نکته اساسی

طبق گفته صورت سوال، حد تابع برابر $\frac{1}{2}$ است. ولی در محاسبه حد، صورت کسر، صفر بدست آمده است. پس واضح است که مخرج هم باید صفر شود و بعد از رفع ابهام، به جواب $\frac{1}{2}$ برسیم.
* اگر مخرج صفر نشود، کل کسر صفر خواهد شد و مخالف $\frac{1}{2}$ می‌شود.

$$2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هویتال}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{\frac{1}{4}}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

۱۳۷- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟
(۴) هیچ مقدار a (۳) -1 (۲) 2 (۱) 1

باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

گزینه ۴

تابع در صفر حد ندارد پس پیوسته هم نیست.



۱۴۵- در نقاطی از منحنی به معادله $x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است. طول نقاط تماس کدام است؟

۱(۱) و ۲(۲) ۱(۳) و ۲(۳) ۲(۴) و ۱(۴)



* وقتی خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است، باید شیب آن برابر صفر باشد، یعنی $y'(0) = 0$

* در توابع ضمنی با ضابطه $F(x, y) = 0$ داریم: $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = 0 \Rightarrow F'_x = 0 \Rightarrow 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$(2y)^2 - 4(2y)y + 3y^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4y^2 - 8y^2 + 3y^2 + 1 = 0$$

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 2y = \pm 2 \quad \text{گزینه ۲}$$

۱۴۶- اگر $A(1, -11)$ نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۳(۱) ۴(۲) ۵(۳) ۶(۴)

باید $f''(1) = 0$ و $f(1) = -11$

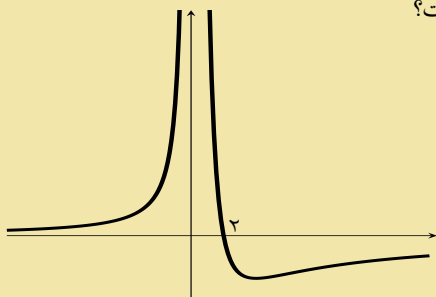
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a = 0 \Rightarrow$$

$$6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3, \quad f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + b(1) = -11$$

$$\Rightarrow b = -9 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \Rightarrow$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = 5 \quad \text{گزینه ۳}$$

۱۴۷- شکل رویرو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b می‌توانیم نسبتی این تابع کدام است؟



$-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۱)
 $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{8}$ (۳)



$x = 0$ مجانب قائم است. پس ریشه مخرج صفر است. یعنی $b = 0$

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{a(2)+2}{2^2} = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x+2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x(-x+2)}{x^4} = \frac{x^2 - 4x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$f(4) = \frac{-4+2}{4^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8} \quad \text{گزینه ۱}$$

۱۴۸- دایره‌ای محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) ۳ (۴)



یادآوری

(۱) فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز آن برابر شعاع دایره است.

(۲) معادله نیمساز ربع اول عبارت است از $y = x$ با شرط $x, y > 0$

پس مختصات مرکز دایره به صورت (α, α) است که باید $\alpha > 0$. فاصله دو نقطه $(1, 0)$ و $(3, 0)$ از مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

۱۴۲- در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

۰/۲ (۱) ۰/۲۵ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۴ (۴)



مجموع تمام جملات یعنی **حد مجموع** که در این حالت فقط در صورتی که $|q| < 1$ باشد، امکان‌پذیر است.

اگر جمله اول a و قدر نسبت q باشد:

مجموع مجذورات تمام جملات A

مجذور مجموع تمام جملات B

$$\text{جمله اول} = \frac{\text{حد مجموع}}{\text{قدر نسبت} - 1}$$

$$A = a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 + \dots \Rightarrow \text{جمله اول} = a^2, \text{ قدر نسبت} = q^2$$

$$B = \left(a + aq + aq^2 + \dots \right)^2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}B$$

$a = \text{جمله اول}$

$$\frac{a^2}{1-q^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{a}{1-q} \right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{2}{3} \times \frac{a^2}{(1-q)^2}$$

$$2(1-q)(1+q) = 3(1-q)^2 \Rightarrow 2 + 2q = 3 - 3q \Rightarrow 5q = 1$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0.2 \quad \text{گزینه ۱}$$

۱۴۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ است؟

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)



وقتی $\frac{\pi}{2}$ داخل کمان باشد، نسبت مثلثاتی تغییر می‌کند. علامت نیز با توجه به این که کمان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد، تعیین می‌شود.

$$\alpha = x + \frac{\pi}{4} \quad \beta = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \times \cos \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\sin \beta \cos \beta = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times(-2)} 2 \sin \beta \cos \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin 2\beta = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \cos A = \cos B \Leftrightarrow A = 2k\pi \pm B$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi \pm \left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{گزینه ۱}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & ; x > 0 \\ \sin 2x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

۱/۵ (۴) ۱/۲۵ (۳) ۱ (۲) ۰/۷۵ (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & ; x > 0 \\ \sin 2x & ; x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \tan \frac{x}{2} & ; x > 0 \\ \sin 2x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

طبق نکته سؤال ۱۳۴

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) & ; x > 0 \\ 2 \cos 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

بنابراین: **گزینه ۴**

$$f'_-(0) - f'_+(0) = 2 \cos(0) - \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2(0) \right) = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

۱۵۲- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه ضلع سوم کدام است؟

- ۸ (۴) ۷.۵ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

اگر ضلع سوم را x بنامیم:

ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2} =$ مساحت مثلث

گزینه ۱

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times h_{10} = \frac{1}{2} \times 15 \times h_{15} = \frac{1}{2} \times x \times h_x$$

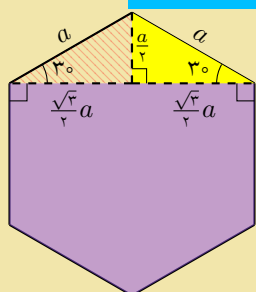
$$10h_{10} = 15h_{15} = x(h_{10} + h_{15}) \Rightarrow 2h_{10} = 3h_{15} \Rightarrow h_{10} = 1.5h_{15}$$

$$\Rightarrow 15h_{15} = x(1.5h_{15} + h_{15}) = x(2.5h_{15}) \Rightarrow x = \frac{15h_{15}}{2.5h_{15}} = 6$$

۱۵۳- مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است. اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

- ۳ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۱)

مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a $= \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$



$$\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 6$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \text{قطر کوچک}$$

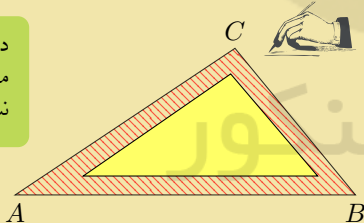
$$= \sqrt{3}a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

گزینه ۲

۱۵۴- درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگری طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

- ۱.۵ (۴) ۱.۲۵ (۳) ۱ (۲) ۰.۷۵ (۱)

دو مثلث، متشابه‌اند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.



$$\frac{S_{\text{کل}}}{S_{\text{کوچک}}} = \left(\frac{9}{6} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

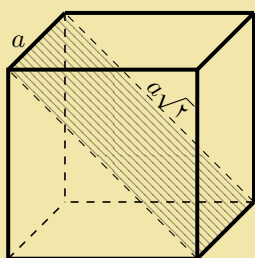
$$\Rightarrow \frac{S_{\text{کوچک}} + S_{\text{باقیمانده}}}{S_{\text{کوچک}}} = \left(\frac{9}{6} \right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow 1 + \frac{S_{\text{باقیمانده}}}{S_{\text{کوچک}}} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{باقیمانده}}}{S_{\text{کوچک}}} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1.25$$

گزینه ۳

۱۵۵- مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $9\sqrt{2}$ می‌باشد. اندازه قطر مکعب کدام است؟

- $3\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۱)



مساحت مستطیل $= a \times a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب $= a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

گزینه ۴

شاد و پیروز باشید!

تلفن تماس: ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

ایمیل: mehrdad.mdpour@gmail.com

تلگرام: telegram.me/mehrdadmadanipour

$$R = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} \Rightarrow$$

$$(\alpha - 3)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 \Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (\alpha - 1)^2 \Rightarrow$$

$$|\alpha - 3| = |\alpha - 1| \Rightarrow \alpha - 3 = \pm(\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = \alpha - 1 \Rightarrow -3 = -1 \\ \alpha - 3 = -(\alpha - 1) \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳

۱۴۹- در یک هذلولی افقی، معادله مجانب‌ها به صورت $y = -2x$ و $y = 2x - 4$ می‌باشند، خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟

- $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

چند نکته از هذلولی

اگر مرکز هذلولی به صورت (α, β) باشد، معادله مجانب‌های هذلولی به صورت زیر است: هذلولی قائم: $y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha)$

هذلولی افقی: $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$

خروج از مرکز هذلولی و بیضی برابر است با $\frac{c}{a}$

شیب مجانب‌ها با توجه به صورت سؤال ± 2 است. پس $\frac{b}{a} = 2$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}{a} = \frac{\sqrt{5a^2}}{a} = \sqrt{5}$$

گزینه ۴

۱۵۰- حاصل $\int_{-1}^2 [x]|x|dx$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- ۲ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$$\int_{-1}^2 [x]|x|dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-1)(-x)dx + \int_0^1 (0)(x)dx + \int_1^2 (1)(x)dx =$$

$$\int_{-1}^0 xdx + \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(0 - \frac{1}{2} \right) + \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 1$$

۱۵۱- اگر $\int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- $2x + 3$ (۴) $2x + 2$ (۳) $x + 3$ (۲) $x + 2$ (۱)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(5x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \int \left(5x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{5x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$\frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C = x\sqrt{x}(2x + 2) + C$$

$$f(x) = \sqrt{x} \left(2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = 2x + 2$$

گزینه ۳